

Задача 11.1. Соударения. На шероховатом столе покоится шайба массой m . На неё налетает шайба массой $3m$, движущаяся со скоростью u . Между ними происходит соударение, в результате которого тяжёлая шайба продолжает двигаться в прежнем направлении, путь, который она проходит до остановки, в $N = 4$ раза меньше пути, пройденного лёгкой шайбой до остановки. Коэффициенты трения скольжения шайб по поверхности стола одинаковы. Определите:

- скорости шайб сразу после соударения;
- какая часть кинетической энергии тяжёлой шайбы перешла во внутреннюю энергию в результате соударения шайб?

Решение. Запишем закон сохранения импульса для удара шайб

$$3m\vec{u} = 3m\vec{u}' + m\vec{v}.$$

Здесь u' — скорость шайбы массой $3m$ после соударения, u — скорость шайбы массой m после соударения.

По условию задачи после соударения тяжёлая шайба движется в прежнем направлении, поэтому в проекции на горизонтальную ось, направленную по направлению движения тяжёлой шайбы, получим

$$3mu = 3mu' + mv. \quad (1)$$

Поделив на массу, получим

$$3u = 3u' + v. \quad (2)$$

По условию задачи коэффициенты трения шайб одинаковы, поэтому ускорения торможения тоже одинаковы. После соударения на шайбу действует одна горизонтальная сила — сила трения скольжения, следовательно, согласно второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} ma_m &= \mu mg; & a_m &= \mu g; \\ 3ma_{3m} &= \mu 3mg; & a_{3m} &= \mu g. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда для путей, пройденных шайбами до остановки, можно записать

$$v^2 = 2 \cdot \mu g \cdot 4S; \quad (4)$$

$$u'^2 = 2 \cdot \mu g \cdot S, \quad (5)$$

где S — путь тяжёлой шайбы.

Из записанных выражений находим, что

$$v = 2u'.$$

Подставим это выражение в закон сохранения импульса и выразим скорости шайб после соударения

$$u' = \frac{3}{5}u; \quad v = \frac{6}{5}u.$$

Запишем закон сохранения энергии для соударения шайб

$$\frac{3mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mu'^2}{2} + Q.$$

Выразим Q и подставим найденные ранее значения скоростей шайб после соударения

$$Q = \frac{3mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{3mu'^2}{2};$$

$$Q = \frac{6}{25}mu^2.$$

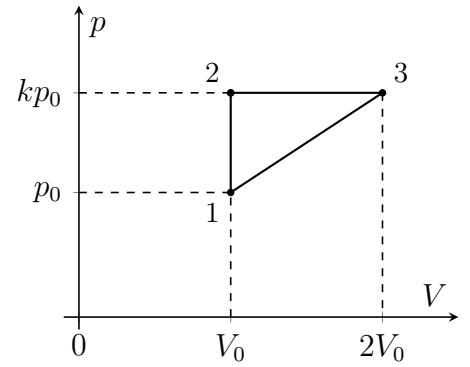
Поделив найденное значение Q на кинетическую энергию тяжёлой шайбы до соударения, получим

$$\frac{Q}{\frac{3mu^2}{2}} = \frac{4}{25}.$$

Критерии оценивания задачи 11.1

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записан закон сохранения импульса в проекции на направление первоначального движения тяжёлой шайбы	Уравнение (1)	1
2	Ускорения шайб при движении до остановки одинаковы		1
3	Записаны выражения (4) и (5)		1
4	Получено выражение $v = 2u'$		1
5	Найдены значения скоростей шайб после соударения (<i>по 1 баллу за каждое</i>)	$u' = \frac{3}{5}u, \quad v = \frac{6}{5}u.$	2
6	Правильно записан закон сохранения энергии		2
7	Какая часть кинетической энергии тяжёлой шайбы перешла во внутреннюю энергию в результате соударения шайб: <ul style="list-style-type: none"> • если найдено только Q, • если найдено нужное отношение. 	$\frac{Q}{\frac{3mu^2}{2}} = \frac{4}{25}$	1 2

Задача 11.2. Полезный цикл. Одноатомный идеальный газ является рабочим телом для тепловой машины. В ходе процесса 1-2-3-1, график которого представлен на диаграмме $(p; V)$ газ сначала изохорно нагревается так, что давление увеличивается от значения p до значения kp , затем газ изобарно расширяется таким образом, что его объём увеличивается в два раза, далее газ возвращается в первоначальное состояние, совершая процесс, в ходе которого давление линейно зависит от объёма. Оказалось, что коэффициент полезного действия этого цикла равен $\eta = 1/18$. Определите значение параметра k .



Решение. Работа газа A в ходе циклического процесса равна площади фигуры, ограничивающей цикл на диаграмме $(p; V)$

$$A = \frac{1}{2}(k-1)p_0V_0.$$

Рассмотрим изохорное нагревание 1-2: работа газа равна нулю, изменение внутренней энергии газа равно:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(kp_0V_0 - p_0V_0) = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0.$$

В соответствии с первым началом термодинамики количество теплоты, которое получил газ в ходе этого процесса, равно

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0.$$

В ходе изобарного процесса 2-3 работа газа равна

$$A_{23} = kp_0V_0.$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}(kp_02V_0 - kp_0V_0) = \frac{3}{2}kp_0V_0.$$

В ходе этого процесса газ получил количество теплоты, равное

$$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23} = kp_0V_0 + \frac{3}{2}kp_0V_0 = \frac{5}{2}kp_0V_0.$$

В ходе процесса 3-1 газ сжимается и охлаждается, поэтому на этом участке газ отдаёт тепло. Таким образом, количество теплоты, полученное от нагревателя в этом процессе, равно

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 + \frac{5}{2}kp_0V_0 = p_0V_0 \left(4k - \frac{3}{2}\right).$$

Определим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{1}{2}(k-1)p_0V_0}{p_0V_0 \left(4k - \frac{3}{2}\right)} = \frac{k-1}{8k-3}.$$

По условию задачи

$$\eta = \frac{1}{18}.$$

Тогда для определения k имеем уравнение

$$\frac{k-1}{8k-3} = \frac{1}{18}.$$

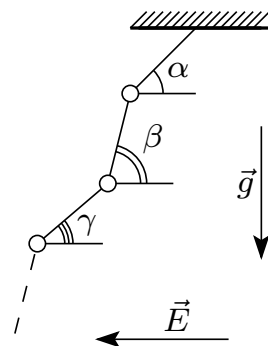
Получаем, что

$$k = \frac{3}{2}.$$

Критерии оценивания задачи 11.2. Полезный цикл.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записана формула для КПД	$\eta = \frac{A}{Q}$	0,5
2	Записано выражение для работы газа за цикл	$A = \frac{1}{2}(k-1)p_0V_0$	2
3	Процесс 1–2 <ul style="list-style-type: none"> • записано выражение для изменения внутренней энергии • работа равна нулю • записано первое начало термодинамики, записано выражение для количества теплоты 	$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0.$ $A_{12} = 0$ $Q_{12} = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$	2, из них: 1 0,5 0,5
4	Процесс 1–3 <ul style="list-style-type: none"> • записано выражение для изменения внутренней энергии • записано выражение для работы • записано первое начало термодинамики, записано выражение для количества теплоты 	$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}kp_0V_0.$ $A_{23} = kp_0V_0$ $Q_{23} = \frac{5}{2}kp_0V_0.$	3, из них: 1 1 1
5	Указано, что в процессе 3–1 газ отдаёт тепло, либо $Q_{31} < 0$, либо Q_{31} не входит в формулу для КПД		0,5
6	КПД цикла связано с k , получена формула	$\eta = \frac{k-1}{8k-3}$	1,5
7	Получен числовой ответ	$k = \frac{3}{2}$	0,5

Задача 11.3. Шарики. К невесомой нити прикреплены шарики: часть шариков невесома и каждый из них несёт на себе заряд $q > 0$, а часть шариков не заряжены, но каждый из них имеет массу m . Заряженные и незаряженные шарики чередуются на нити. Представленную систему помещают в постоянное однородное электрическое поле, вектор напряжённости которого направлен горизонтально. При этом самый верхний сегмент нити оказался расположен под углом $\alpha = 57,0^\circ$ к горизонтали, следующий за ним участок нити составил угол $\beta = 60,0^\circ$ с горизонталью, а следующий за ним — угол $\gamma = 56,6^\circ$.



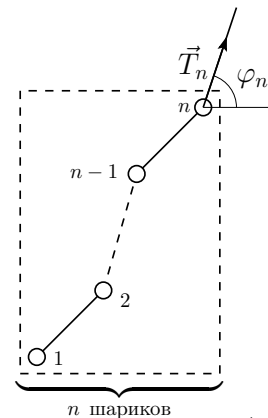
Чётное или нечётное количество шариков находится на нити? Чему равна напряжённость электрического поля E ? Какой шарик расположен на нижнем конце нити — заряженный или незаряженный? Чему равно общее количество шариков N ?

Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что электростатическим взаимодействием шариков между собой можно пренебречь.

Решение. Рассмотрим участок цепочки, включающий n шариков, начиная с самого нижнего. В сегменте нити, соединённом с данным участком, будет действовать сила натяжения \vec{T}_n , направленная под углом φ_n к горизонтали (нумерация шариков начинается с самого нижнего). Если n — чётное, то в сегменте находится k заряженных шариков и k массивных, $k = 1, 2, \dots$. На сегмент будет действовать результирующая сила тяжести $km\vec{g}$ и результирующая сила взаимодействия с электрическим полем $kq\vec{E}$. Тогда из условия равновесия

$$\begin{cases} kmg = T_n \sin \varphi_n, \\ kqE = T_n \cos \varphi_n. \end{cases} \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{mg}{qE} \Rightarrow \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{mg}{qE}. \quad (2)$$



Для шариков с чётными номерами угол наклона сегмента нити, следующего за шариком, не будет зависеть от его номера. Из трёх значений углов, приведённых в условии, ни одно не повторяется, следовательно, самый верхний шарик не может иметь чётный номер, таким образом, общее количество шариков N нечётное, а $\beta = \varphi_{\text{чет}}$. Отсюда можно определить величину напряжённости электрического поля

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{mg}{qE} \Rightarrow E = \frac{mg}{q \operatorname{tg} \beta} = \frac{mg}{\sqrt{3}q}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим ситуацию для участка цепочки из нечётного количества шариков. Предположим, что самый нижний шарик (с номером 1) заряжен. Тогда на данном участке находится k заряженных шариков и $k - 1$ массивных, из условия равновесия

$$\begin{cases} (k-1)mg = T_n \sin \varphi_n, \\ kqE = T_n \cos \varphi_n. \end{cases} \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{k-1}{k} \frac{mg}{qE} \Rightarrow \varphi_n = \operatorname{arctg} \left(\frac{k-1}{k} \cdot \frac{mg}{qE} \right). \quad (4)$$

Заметим, что $(k-1)/k < 1$ и углы наклона нити для нечётных шариков в этом случае всегда будут меньше, чем для чётных.

Выполнив аналогичные рассуждения в случае, когда самый нижний шарик не заряжен, получим

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{k-1} \cdot \frac{mg}{qE} \right), \quad (5)$$

и в этом случае углы наклона нитей для нечётных шариков будут больше, чем для чётных. В нашем случае углы $\alpha, \gamma < \varphi_{\text{чет}} = \beta$, следовательно, на конце нити находится заряженный шарик.

Теперь можно найти общее количество шариков N . Для самого верхнего шарика

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{\text{верхн}} - 1}{k_{\text{верхн}}} \cdot \frac{mg}{qE} = \frac{k_{\text{верхн}} - 1}{k_{\text{верхн}}} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow k_{\text{верхн}} = \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}} = 9. \quad (6)$$

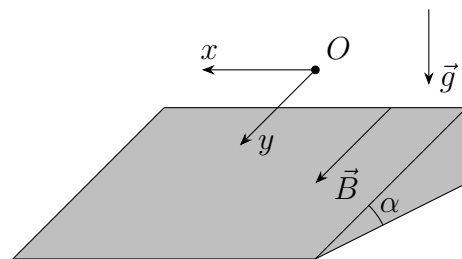
Тогда общее количество шариков $N = k_{\text{верхн}} + (k_{\text{верхн}} - 1) = 17$.

Критерии оценивания задачи 11.3 Шарики.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Записано условие равновесия для участка цепочки. Участник мог решать эту задачу, рассматривая не участок из n шариков, а последовательно рассматривая отдельные шарiki. Балл ставится, если условие равновесия правильно записано хотя бы для одного шарика или сегмента цепочки.	Формула (1) или аналогичная	1
2	Обосновано утверждение, что для шариков с чётными номерами углы наклона нити будут одинаковыми.		2
3	Установлено, что цепочка содержит нечётное количество шариков.		1
4	Получено выражение для напряжённости электростатического поля	$E = \frac{mg}{\sqrt{3}q}$	1
5	Получена формула для углов наклона нити для нечётных шариков в случае, если первый шарик заряжен	Формула (4) или эквивалентная	1
6	Получена формула для углов наклона нити для нечётных шариков в случае, если первый шарик не заряжен	Формула (5) или эквивалентная	1
7	Обосновано, что на нижнем конце нити находится заряженный шарик		2
8	Найдено общее количество шариков	$N = 17$	1

Задача 11.4. Парабола в магнитном поле.

В точке O над наклонной плоскостью, образующей с горизонтом угол α , находится частица массой m с зарядом $q > 0$. Введём прямоугольную систему координат xOy , где ось Oy направлена вниз вдоль наклонной плоскости, а ось Ox — горизонтально (плоскость xOy параллельна наклонной). В области над наклонной плоскостью создано постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен в положительном направлении оси Oy (см. рисунок).



Частице сообщили начальную скорость параллельно оси Ox . Оказалось, что при последующем движении частицы её траектория лежит в плоскости xOy и задаётся уравнением $y = ax^2$, где $a > 0$ — известная постоянная. Ускорение свободного падения равно g .

- 1) В положительном направлении оси Ox или противоположном ему частице сообщили скорость? Ответ обоснуйте.
- 2) Какую начальную скорость v_0 сообщили частице?
- 3) Чему равна величина индукции \vec{B} магнитного поля?

Решение. 1) Введём ось Oz , перпендикулярную наклонной плоскости и направленную от неё. Поскольку частица движется в плоскости xOy , сила Лоренца всегда направлена вдоль оси Oz . Сила тяжести направлена в плоскости yOz , поэтому в направлении оси Ox на частицу не действуют никакие силы. Из второго закона Ньютона в проекции на ось Ox :

$$ma_x = 0 \Rightarrow v_x = \text{const.}$$

Таким образом, проекция скорости частицы на ось Ox остаётся постоянной.

Из условия движения частицы в плоскости xOy следует, что проекция её ускорения a_z на ось Oz равняется нулю. Из второго закона Ньютона в проекции на ось Oz :

$$ma_z = 0 = F_{\text{Л}z} - mg \cos \alpha \Rightarrow F_{\text{Л}z} = mg \cos \alpha,$$

где $F_{\text{Л}z}$ — проекция силы Лоренца на ось Oz .

Пусть в некоторый момент скорость частицы равна v и направлена под углом φ к оси Oy так, как показано на рисунке. Сила Лоренца направлена перпендикулярно плоскости рисунка, а её проекция $F_{\text{Л}z}$ на ось Oz определяется выражением:

$$F_{\text{Л}z} = qvB \sin \varphi = qBv_x,$$

где v_x — проекция скорости частицы на ось Ox . Отсюда:

$$qv_x B = mg \cos \alpha \Rightarrow v_x = \frac{mg \cos \alpha}{qB} > 0.$$

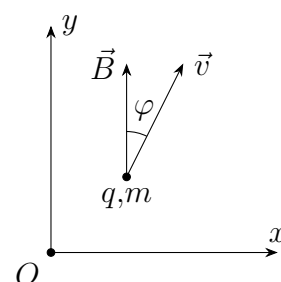
Поскольку проекция скорости частицы v_x на ось Ox является положительной, частице сообщили скорость в положительном направлении оси Ox .

- 2) Рассмотрим движение частицы вдоль оси Oy . Из второго закона Ньютона:

$$ma_y = mg \sin \alpha \Rightarrow a_y = g \sin \alpha = \text{const.}$$

Поскольку в начальный момент $v_y = 0$, получим:

$$y(t) = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}$$



При решении первого пункта было показано, что проекция скорости частицы на ось Ox остаётся постоянной и равной v_0 , поэтому $x(t) = v_0 t$. Отсюда получим зависимость $y(x)$:

$$y(x) = ax^2 = \frac{gx^2 \sin \alpha}{2v_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{2a}}.$$

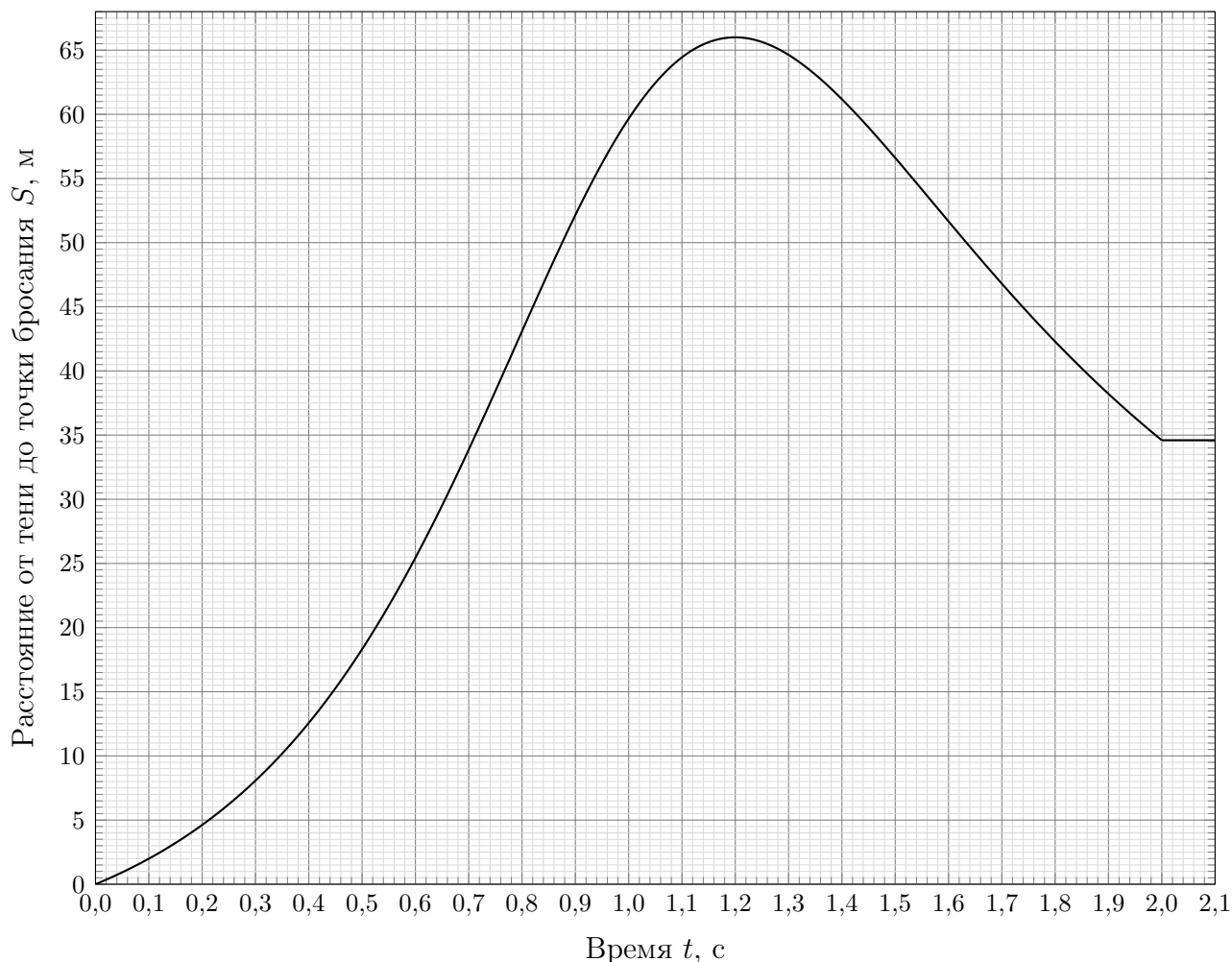
3) Воспользуемся выражением для v_x , полученным при решении первого пункта:

$$v_0 = \frac{mg \cos \alpha}{qB} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{2a}} \Rightarrow B = \frac{m \cos \alpha}{q} \sqrt{\frac{2ag}{\sin \alpha}}.$$

Критерии оценивания задачи 11.4. Парабола в магнитном поле.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1.1	Указано, что сила Лоренца направлена перпендикулярно наклонной плоскости		1,0
1.2	Указано, что сила Лоренца должна быть направлена от наклонной плоскости		0,5
1.3	Показано, что сила Лоренца направлена от наклонной плоскости, если проекция v_x скорости частицы на ось Ox является положительной		1,0
1.4	Показано, что частице сообщили скорость в положительном направлении оси Ox		0,5
2.1	Показано, что проекция скорости частицы на ось Ox постоянна и равна v_0		1,5
2.2	Определена проекция a_y ускорения частицы на ось Oy	$a_y = g \sin \alpha$	1,0
2.3	Найдено уравнение траектории частицы	$y(x) = \frac{gx^2 \sin \alpha}{2v_0^2}$	2,0
2.4	Получен ответ для v_0	$v_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{2a}}$	0,5
3.1	Из условия движения частицы в плоскости xOy получено следующее соотношение:	$qv_0 B = mg \cos \alpha$	1,0
3.2	Получен ответ для B	$B = \frac{m \cos \alpha}{q} \sqrt{\frac{2ag}{\sin \alpha}}$	1,0

Задача 11.5. Мяч, фонарь и тень. Из точки, расположенной прямо под фонарём, бросают небольшой мячик со скоростью v_0 под углом α к линии горизонта. При движении мячик отбрасывает тень на поверхность земли. Датчик измеряет расстояние S от тени до точки бросания. Построенный по показаниям датчика график зависимости расстояния S от времени движения мячика t представлен на рисунке.



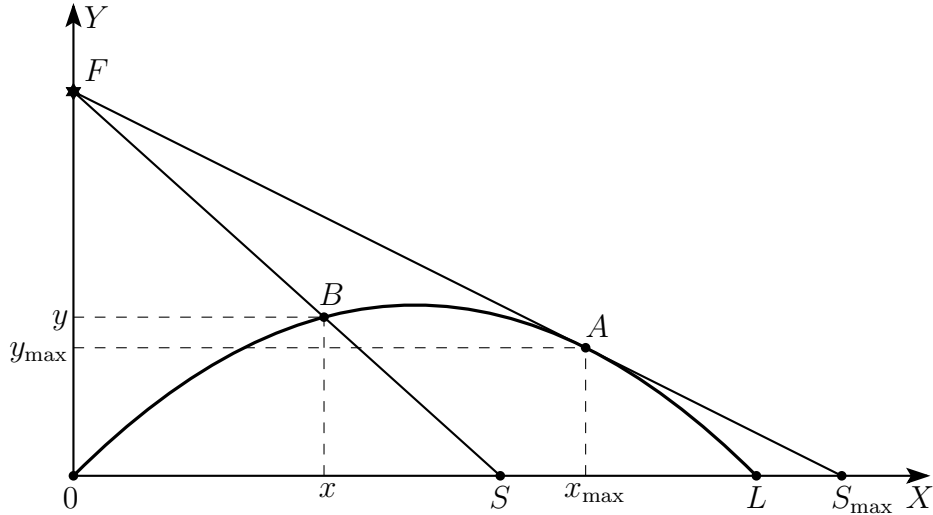
Определите:

- время полёта мяча T ;
- дальность полёта мяча L ;
- высоту H , на которой находится фонарь;
- угол β , который составляет вектор скорости мяча с горизонтом в тот момент времени, когда тень от мяча на земле находилась на максимальном расстоянии от точки бросания.

Фонарь можно считать точечным источником света. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Решение. По графику определяем, что время полёта мяча равно $T = 2 \text{ с}$. В этот момент времени мяч оказался на земле, поэтому координата тени совпадает с координатой мяча. Таким образом, дальность полёта мяча равна примерно $L = (34,5 \pm 0,5) \text{ м}$.

Определим, как меняется расстояние от точки бросания мяча до его тени на земле в зависимости от времени. Изобразим траекторию мяча, отметим его положение в некоторой точке B . Координаты мяча в этот момент времени равны x, y , тень находится в точке S . Расстояние от точки бросания до тени от мяча на земле будет максимально, ко-



гда мяч находится в точке A , для которой прямая линия, идущая от фонаря (т. F), будет касательной к траектории мяча. Координаты точки A обозначим x_{\max} , y_{\max} .

Используя график, данный в условии задачи, определим S_{\max} :

$$S_{\max} = (66,0 \pm 0,5) \text{ м.}$$

По графику определяем момент времени t_{\max} , когда тело мяч оказывается в точке A :

$$t_{\max} = (1,20 \pm 0,02) \text{ с.}$$

Так как скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории, то угол β определяется из прямоугольного треугольника $OF S_{\max}$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{S_{\max}}. \quad (1)$$

Кроме того, тангенс β можно выразить через координаты тела x_{\max} , y_{\max}

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H - y_{\max}}{x_{\max}} \quad (2)$$

и проекции скорости тела на оси OX и OY :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|v_y|}{v_x}. \quad (3)$$

Определим координаты и скорости мяча в момент времени t_{\max} :

$$\begin{aligned} x_{\max} &= v_0 \cdot t_{\max} \cdot \cos \alpha; \\ y_{\max} &= v_0 \cdot t_{\max} \cdot \sin \alpha - \frac{gt_{\max}^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos \alpha; \\ v_y &= |v_0 \cdot \sin \alpha - gt_{\max}| = gt_{\max} - v_0 \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Приравняем выражения (2) и (3) и подставим координаты и проекции скоростей

$$\begin{aligned} \frac{H - y_{\max}}{x_{\max}} &= \frac{|v_y|}{v_x}; \\ \frac{H - (v_0 \cdot t_{\max} \cdot \sin \alpha - \frac{gt_{\max}^2}{2})}{v_0 \cdot t_{\max} \cdot \cos \alpha} &= \frac{gt_{\max} - v_0 \cdot \sin \alpha}{v_0 \cdot \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Преобразовав уравнение, получим высоту фонаря H

$$H = \frac{gt_{\max}^2}{2}, \quad (4)$$

$$H = (7,20 \pm 0,24) \text{ м.}$$

Из (1) определим угол β , который составляет вектор скорости мяча с горизонтом в тот момент времени, когда тень от мяча на земле находилась на максимальном расстоянии от точки бросания

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= 0,110 \pm 0,005; \\ \beta &= (6,3 \pm 0,3)^\circ. \end{aligned}$$

Критерии оценивания задачи 11.5. Мяч, фонарь и тень.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Определена максимальная дальность полёта мяча по графику (<i>здесь и далее полный балл ставится даже при отсутствии в работе участника оценки погрешности</i>)	$L = (34,5 \pm 0,5) \text{ м.}$	0,25
2	Определено время полёта мяча	$T = 2 \text{ с}$	0,25
3	По графику определено максимальное расстояние от точки бросания до тени мяча	$S_{\max} = (66,0 \pm 0,5) \text{ м}$	0,25
4	По графику определён момент времени t_{\max} , когда тело мяч оказывается в точке A	$t_{\max} = (1,20 \pm 0,02) \text{ с}$	0,25
5	Расстояние от точки бросания до тени от мяча на земли будет максимально, когда мяч находится в точке, для которой прямая линия, идущая от фонаря к ней, будет касательной к траектории мяча		2
6	Записаны выражения (1), (2) и (3) <i>по 0,5 балла за каждое</i>		1,5
7	Записаны выражения для координат и проекций скоростей <i>по 0,5 балла за каждое:</i> • $x_{\max} = v_0 \cdot t_{\max} \cdot \cos \alpha$; • $y_{\max} = v_0 \cdot t_{\max} \cdot \sin \alpha - gt_{\max}^2/2$; • $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$; <i>и 1 балл за следующее:</i> • $v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - gt_{\max} = gt_{\max} - v_0 \cdot \sin \alpha$. <i>Возможны альтернативные способы решения задачи. Например, можно получить зависимость $S(t)$ из геометрии рисунка, зная зависимости $x(t)$ и $y(t)$ для мячика, и далее исследовать её на максимум. В этом случае баллы ставятся за аналогичные рассуждения: по 0,5 б. за зависимости $x(t)$ и $y(t)$ и 1,5 б. за исследование на максимум.</i>		2,5, из них 0,5 0,5 0,5 1

8	Получено выражение (4)		1
9	Определена высота, на которой находится фонарь	$H = (7,20 \pm 0,24) \text{ м}$	0,5
10	Явно указано, что скорость тела в момент времени t_{max} направлена по касательной к траектории		1
11	Определён угол β	$\beta = (6,3 \pm 0,3)^\circ$.	0,5